

SCOPE LA MEDIDA DE LA SEMEJANZA ENTRE IMAGENES DISCRETAS
101017ALEBT

Gary Duch N. y Patricia E.

Dir. Gral., Geografía-Inst. Nal. Estad. Geogr. Inform.

INTRODUCCION

Las imágenes discretas por computadora (DPI) participan cada vez más en la ciencia y tecnología de la información. Las imágenes en un sistema de líneas de TV blanco y negro, las imágenes que provienen de los sistemas de procesamiento de recursos de la tierra son ejemplos de este tipo de imágenes.

PONENCIAS

INVITADAS

SOBRE LA MEDIDA DE LA SEMEJANZA ENTRE IMAGENES DISCRETAS (DIGITALES)

Gary Duch N. Bribiesca E.

Dir. Gral. Geografía-Inst. Nal. Estad. Geogr. Inform.

INTRODUCCION

Las imágenes discretas monocromáticas (IDM) participan crecientemente en la ciencia y técnica de nuestros días. Las imágenes en una pantalla de televisión en blanco y negro, las imágenes que provienen de los satélites de prospección de recursos de la tierra son ejemplos de este tipo de imágenes.

En medicina y astronomía, por citar dos casos, se utilizan (IDM) u otras que no siéndolo son fácilmente reducibles a imágenes de esa índole. Cada vez son mayores los campos de utilización de las (IDM). Es cierto que existen también imágenes discretas policromáticas; no nos ocuparemos de ellas en este trabajo pero los métodos y conceptos presentados para las (IDM) son extendibles a este caso.

La creciente utilización de las (IDM) se debe a que se prestan particularmente bien al tratamiento numérico por medio de computadoras, sin pérdida significativa de la precisión de contenido de información en relación a las imágenes que, en contraparte, llamaríamos monocromáticas de tonos continuos.

En su utilización práctica las (IDM) deben ser interpretadas, comparadas, etc. Es esta operación de comparación la que nos interesa para los fines de este trabajo.

Conviene aclarar que supondremos que las (IDM) pueden ser sometidas a una serie de tratamientos previos (corrección geométrica en el caso de (IDM) provenientes de satélites de prospección de recursos, filtrados, etc.). Trabajamos con imágenes que son consideradas ya productos finales para su utilización con fines de comparación.

La operación de comparación de dos imágenes discretas monocromáticas consiste, básicamente, en elegir una imagen como patrón y compararla con otra para establecer cuál es el grado de semejanza entre ambas. Es cierto que este proceso puede efectuarse —y de hecho se efectúa— utilizando nuestro sistema de percepción visual. Sin embargo las comparaciones hechas de este modo son fuertemente dependientes del intérprete humano. Dos personas, con experiencias y formaciones distintas, pueden hacer comparaciones cuyos resultados sean notoriamente diferentes. Para obtener resultados más consensualmente aceptables es necesario proceder de otro modo; se requiere que el sistema de comparación se preste menos a la ambigüedad y que, en consecuencia dependa menos de las características del intérprete. La ciencia, en general, ha avanzado notablemente en ese sentido mediante la especialización y precisión del lenguaje utilizado. En la medida en que precisamos la semántica y la sintaxis del sistema de signos empleado para tratar un determinado campo que nos interesa conocer, se disminuye la ambigüedad y se tiende a constituir lenguajes monosémicos. Esto es, lenguajes cuyas combinaciones de signos tienen significación única. En este caso que nos ocupa se ha intentado la reducción de los conceptos de imagen discreta monocromática y de semejanza a conceptos matemáticos. De este modo la semántica de la sintaxis con que se tratan los primeros conceptos corresponde a las de la matemática que es el lenguaje monosémico por antonomasia.

Esta reducción, por otra parte, abre el camino para la comparación por conducto de la computación electrónica. De este modo, el procedimiento se beneficia con la rapidez y precisión propios de esta tecnología.

LA SEMEJANZA

Sea A un conjunto finito no vacío de elementos cualesquiera. Denotemos por $A \times A$ o más brevemente por A^2 el producto cartesiano de A por sí mismo. Una relación binaria en A que denotaremos R es cualquier subconjunto de A^2 . Si a y b elementos de A están en la relación binaria R , escribimos $(a,b) \in R$.

Dada una relación binaria R , ésta puede cumplir diferentes propiedades. En este trabajo nos interesa el cumplimiento o no de las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad. En general las relaciones binarias reflexivas, simétricas y transitivas se dice que son relaciones de equivalencia. Las relaciones binarias reflexivas, antisimétricas y transitivas son relaciones de orden y las que son reflexivas, simétricas y no necesariamente transitivas se dice que son relaciones de semejanza o similitud.

Esto es, sea R una relación binaria en A y $a,b,c \in A$ si se cumple que:

- i) para toda $a \in A$, $(a,a) \in R$
- ii) para todo $a,b \in A$, $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
- iii) para todo $a,b,c \in A$, $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \notin R$.

donde \notin denota: no necesariamente pertenece, entonces R es una relación binaria de semejanza.

Sin embargo, aunque lo anterior es una caracterización rigurosa de la semejanza no se presta al cálculo numérico. Para salvar este obstáculo utilizaremos otro concepto, el concepto de proximidad. La proximidad es también una relación binaria entre elementos de un conjunto. Es posible mostrar (aunque no lo haremos aquí) que una relación de proximidad es reflexiva, simétrica y no necesariamente transitiva. Esto es, cumple exactamente las mismas propiedades que la relación de semejanza; en otras palabras: semejanza y proximidad son la misma relación con diferente nombre. Sin embargo, la noción de proximidad nos sugiere el método para calcularla: dos objetos o elementos de un conjunto estarán próximos (y en consecuencia serán semejantes) si la distancia que los separa es pequeña.

Dado lo anterior nos interesa ahora precisar las condiciones que debe cumplir un conjunto para que sea posible calcular una distancia entre todos sus pares de elementos. Después, más adelante, precisaremos qué entendemos por una "distancia pequeña".

Sea A un conjunto no vacío y finito (o no) de objetos (o elementos) cualesquiera. Sea d una función de A^2 en \mathbb{R}^+ , donde \mathbb{R}^+ denota a los números reales positivos (cero incluido). Si d cumple que:

- i) para todo $a \in A$ y $b \in A$, $d(a,b) \geq 0$.
- ii) si $a, b \in A$ y $d(a,b) = 0$ entonces $a = b$.
- iii) para todo $a, b \in A$, $d(a,b) = d(b,a)$.
- iv) para todo $a, b, c \in A$, $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$.

entonces d es una distancia que induce una métrica en A . El conjunto A provisto de la distancia d constituye un espacio métrico. Esto es, un conjunto donde es posible medir una distancia (y por ende evaluar una proximidad y en consecuencia evaluar una semejanza) entre cualquier par de elementos que pertenezcan a él. En consecuencia, resulta de particular importancia si se tiene interés en medir semejanzas entre elementos de un conjunto, que éste sea un espacio métrico.

IMAGENES MONOCROMATICAS DISCRETAS

Sea P el conjunto de celdas de un arreglo rectangular de n renglones por m columnas. Sea T un conjunto de tonos de gris. Sea f una función que asocia a cada celda $a_{ij} \in P$ (que llamaremos una posición) uno y sólo uno de los tonos de gris $t_k \in T$. Denotemos por $f(a_{ij}) = t_k$ la imagen de $a_{ij} \in P$ que f le asocia en T . El conjunto de todas las imágenes de P , dispuestas en el mismo arreglo que P es lo que llamaremos una imagen discreta monocromática.

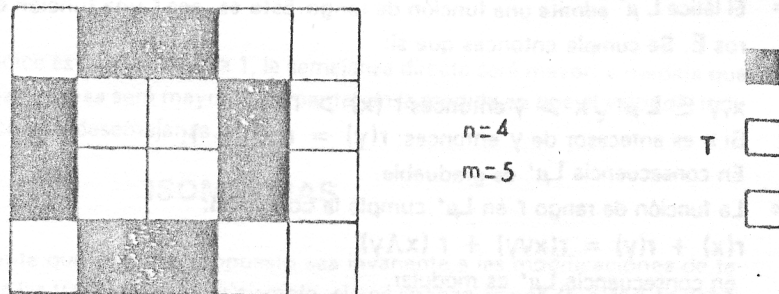


figura No. 1

En la figura No. 1 se da un ejemplo muy simple de este tipo de imagen.

Si en T hay K tonos de gris distinguibles y por IPI y ITI denotamos la cardinalidad de cada uno de ellos, el número posible de imágenes construibles a partir de esos conjuntos estará dado por:

$$ITI^{IPI}$$

Si $ITI = K$ y $IPI = nxm$ entonces tendremos que el número de imágenes construibles es:

$$K^{nxm}$$

En la práctica, una imagen de satélite Landsat 4, por ejemplo, puede manejarse con 8 tonos de gris y 2,430 renglones y 3,240 columnas. Por tanto, el número de imágenes construibles es:

$$8^{2,430 \times 3,240} = 8^{7,873,200}$$

El número anterior es difícilmente manejable. Por esa razón es indispensable organizar ese conjunto; dotarlo de una estructura que nos permita guiarnos en ese universo.

ORGANIZACION DEL UNIVERSO DE IMAGENES MONOCROMATICAS DISCRETAS

Para ilustrar la organización del universo μ , nos valdremos de "un modelo a escala". Si P es el conjunto formado por 2 renglones y 2 columnas y T está constituido por 3 tonos de gris, este modelo a escala de μ , que denotaremos por μ' constará de

$$3^4 = 81 \text{ imágenes.}$$

En el anexo I de este trabajo, se muestra una representación de este Universo. μ' Al pie de la figura se ha establecido una relación de orden total entre los tres tonos de gris del conjunto T . Con base en ese orden total, el universo μ' de figuras puede organizarse en un orden parcial. Ese orden, está figurado por las líneas negras continuas. A continuación, listamos sin demostración y sin comentarios las propiedades más relevantes para nuestros fines, de ese orden parcial establecido en μ' .

- El orden parcial es un látice que denotaremos por $L_{\mu'}$
- Esto es, cada par de elementos $x, y \in L_{\mu'}$ posee un supremo que denotaremos por $x \vee y$ y un ínfimo que se denotará por $x \wedge y$
- El látice $L_{\mu'}$ cumple la condición de Jordan-Dedekind.
- El látice $L_{\mu'}$ admite una función de rango. Esto es, sea r una función de $L_{\mu'}$ en los enteros E . Se cumple entonces que si:

$$x, y \in L_{\mu'} \vee x > y \text{ entonces } r(x) > r(y)$$

$$\text{Si } x \text{ es antecesor de } y \text{ entonces: } r(y) = r(x) + 1.$$

En consecuencia $L_{\mu'}$ es graduable.

La función de rango r en $L_{\mu'}$ cumple la condición:

$$r(x) + r(y) = r(x \vee y) + r(x \wedge y)$$

en consecuencia $L_{\mu'}$ es modular.

- Teorema: Un látice es métrico si y sólo si es modular.
En consecuencia $L_{\mu'}$ es un látice métrico.

Esto es, el látice $L_{\mu'}$ (que es un conjunto de imágenes discretas monocromáticas organizadas por una relación de orden parcial) es un espacio métrico. De acuerdo con lo que ya sabemos, en un espacio métrico es posible calcular una distancia entre todo par de elementos; consecuentemente es posible medir proximidades y por lo tanto semejanzas. Dado que los elementos del conjunto $L_{\mu'}$ son imágenes discretas monocromáticas y $L_{\mu'}$ es un espacio métrico, entonces entre todo par de este tipo de imágenes es posible medir una distancia y consecuentemente la semejanza entre ellas. Se puede demostrar que para todo $x, y \in L_{\mu'}$ $d(x, y) = r(x \vee y) - r(x \wedge y)$ es una función de distancia si $L_{\mu'}$ es un látice métrico.

LA CONSTRUCCION DEL INDICE

Como puede verse en la figura del anexo I, el látice $L_{\mu'}$ tiene un supremo absoluto (la imagen completamente negra) y un ínfimo absoluto, (la imagen completamente blanca). La distancia máxima en el látice es, entonces, la distancia entre estos elementos. En consecuencia, una distancia será "pequeña" en relación a esa distancia máxima. Desde luego, nada cambia, si L_{μ} es extraordinariamente grande. Es claro que existe una cierta relación inversa entre la figura negra

y la figura blanca: son negativo y positivo (en sentido fotográfico). Es conveniente, en nuestra opinión, que el índice dé cuenta de esta semejanza inversa.

El índice que proponemos es entonces el siguiente:

$$S_{xy} = 1 - \frac{2 d_{xy}}{d_{max}}$$

Este índice da una medida normalizada de la relación que hay entre la distancia máxima y la distancia entre dos imágenes (consecuentemente es una medida de la semejanza).

Los valores de este índice serán:

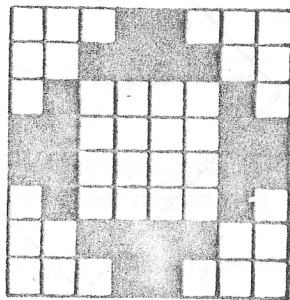
- 1 si X e Y son idénticos; esto es si X es la misma imagen que Y.
- 0 si X e Y son máximamente desemejantes en μ .
- 1 si X e Y son inversas en el sentido de que una es el negativo (en sentido fotográfico) de la otra imagen.

En la medida en que el índice es más cercano a 1, la semejanza directa será mayor; a medida que se acerca a -1 la semejanza inversa será mayor; finalmente, en la medida en que el valor del índice se aproxime a 0 crecerá la desemejanza.

ISOMETRIAS

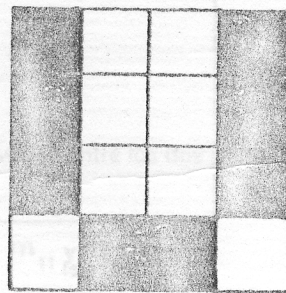
Nos ha parecido interesante que el índice propuesto sea invariante a las modificaciones de tamaño, a las rotaciones y a las traslaciones. Por ejemplo, si una imagen es una A, el índice deberá ser 1 si esa misma A es más pequeña, está desplazada o está girada.

El primer paso propuesto para cumplir este fin, es el de normalizar las figuras en tamaños y tonos.



8x8

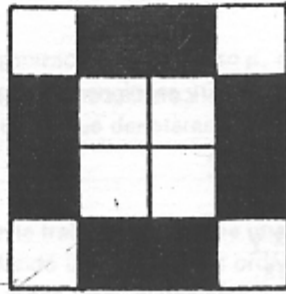
Imagen 1 2 tonos



4x4

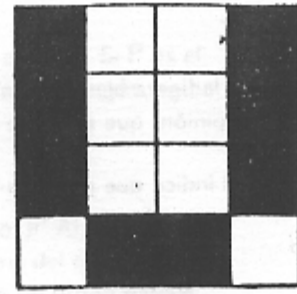
Imagen 2 2 tonos

Se normalizan en 4x4 elementos y se obtiene



4 x 4

Imagen 1



4 x 4

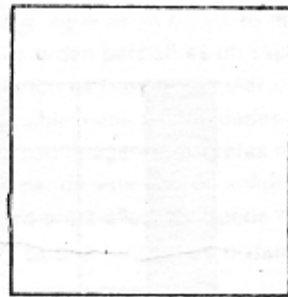
Imagen 2

La normalización en la imagen 1 se hace promediando el número de elementos contenidos con el número de elementos deseados uno por uno: Así en el caso mostrado, considerando el origen como el punto superior izquierdo y el primer subíndice de cada elemento como el renglón correspondiente y el segundo subíndice de cada elemento como la columna correspondiente. Por ejemplo: el elemento del primer renglón de la segunda columna denotado por a_{12} se definió con un 75% de tono negro y un 25% de tono blanco, por lo tanto se le asigna el tono negro. El elemento a_{41} tuvo un 100% de blanco, etc. El resultado de este procedimiento puede verse en el anexo II.

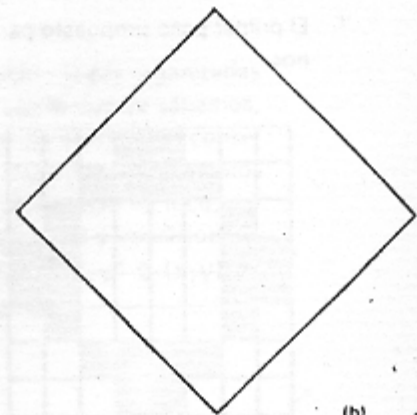
Otro elemento importante es la eliminación de la dependencia en la rotación de imágenes; dos imágenes pueden ser reconocidas como iguales aunque en una de ellas exista un giro.

Para eliminar esta dependencia es necesario encontrar una orientación única para cada imagen. Un método propuesto por Bribiesca y Guzmán⁶ elimina la dependencia en rotación usando un rectángulo básico y definiendo el eje mayor para cada forma (generalizado aquí al caso de las imágenes).

Así, el objetivo es, dadas:



(a)



(b)

Dar un tamaño único o sea normalizar y dar una orientación única.

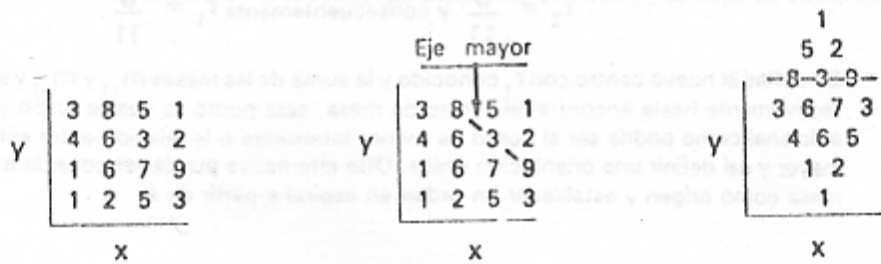
⁶ Bribiesca and Guzmán "How to Describe Pure Form and How to Measure Differences in Shapes Using Shape Numbers" Pattern Recognition Vol. 12 No. 2 pp 101-112. Pergamon Press, 1980.

Considerando el siguiente arreglo numérico como una imagen, se proponen algunos criterios:

3	8	5	1
4	6	3	2
1	6	7	9
1	2	5	3

imagen de 4 x 4 elementos con 9 tonos de gris.

- ii) Seleccionar un eje mayor entre los puntos de más alta tonalidad y orientarlo en el eje de los X's



Orientación en X.

Ahora bien, usando este método podría salir más de un eje mayor; es recomendable entonces, agregar nuevas condiciones que garanticen la unicidad de la orientación.

- iii) Selección del centro de gravedad de la imagen, es decir, si los pixeles o sea los elementos mínimos de resolución "pesarán" proporcionalmente a su intensidad de gris, se debe encontrar el punto de equilibrio sea de la imagen y éste será único.

3	8	5	1
4	6	3	2
1	6	7	9
1	2	5	3

Un ejemplo de imagen.

Considerando cada pixel como una masa, el centro de gravedad entre los dos primeros pixeles del primer renglón sería

$$m_{11} r_1 = m_{12} r_2 \text{ en donde } r_1 + r_2 = \text{distancia entre } m_{11} \text{ y } m_{12}.$$

la distancia entre m_{11} y m_{12} es unitaria, de donde:

$$r_1 + r_2 = 1$$

$$r_1 = 1 - r_2$$

$$m_{11}(1-r_2) = m_{12}r_2$$

Substituyendo valores

$$3(1-r_2) = 8r_2$$

$$3-3r_2 = 8r_2$$

$$3 = 11r_2$$

$$r_2 = \frac{3}{11} \text{ y consecuentemente } r_1 = \frac{8}{11}$$

Se define el nuevo centro con r_1 conocido y la suma de las masas m_{11} y m_{12} y se continúa interactivamente hasta encontrar el centro de masa, este punto se vuelve único y con un criterio adicional como podría ser el punto de menor intensidad o la relación entre este punto y el eje mayor y así definir una orientación única. Otra alternativa puede ser considerar el centro de masa como origen y establecer un orden en espiral a partir de él.

En el apéndice II, se muestran algunos ejemplos de la aplicación de esos criterios para la orientación de imágenes.

APLICACIONES

La aplicación fundamental del índice de semejanza propuesto es la de comparar una imagen conocida, que sirve de patrón, con otra u otras para inferir, a partir de la primera, propiedades no conocidas sobre éstas últimas. Por ejemplo, si utilizamos como patrón la radiografía (transformada en imagen discreta monocromática) de un órgano sano del cuerpo humano o afectado por una cierta enfermedad, (que ya conocemos bien) podemos comparar contra este patrón, mediante el índice de semejanza propuesto, otra radiografía del mismo órgano y medir cuantitativamente su grado de similitud. Esta comparación puede ser muy útil a los fines de diagnóstico de enfermedades.

Otra aplicación que podría resultar particularmente interesante es la medición de la evolución territorial. Supongamos que queremos medir por estados o municipios el grado en que se ha modificado su territorio. Si disponemos de tomas de satélite en dos fechas que definan un período podemos medir la autosemejanza de cada estado o municipio. Si el índice es muy cercano a 1, el territorio del estado, municipio (o región considerada) la evolución es poco significativa. A la inversa, en tanto el índice se aproxime a 0, la evolución ha sido muy intensa: el territorio en cuestión no se parece a sí mismo después de haber transcurrido un período de tiempo.

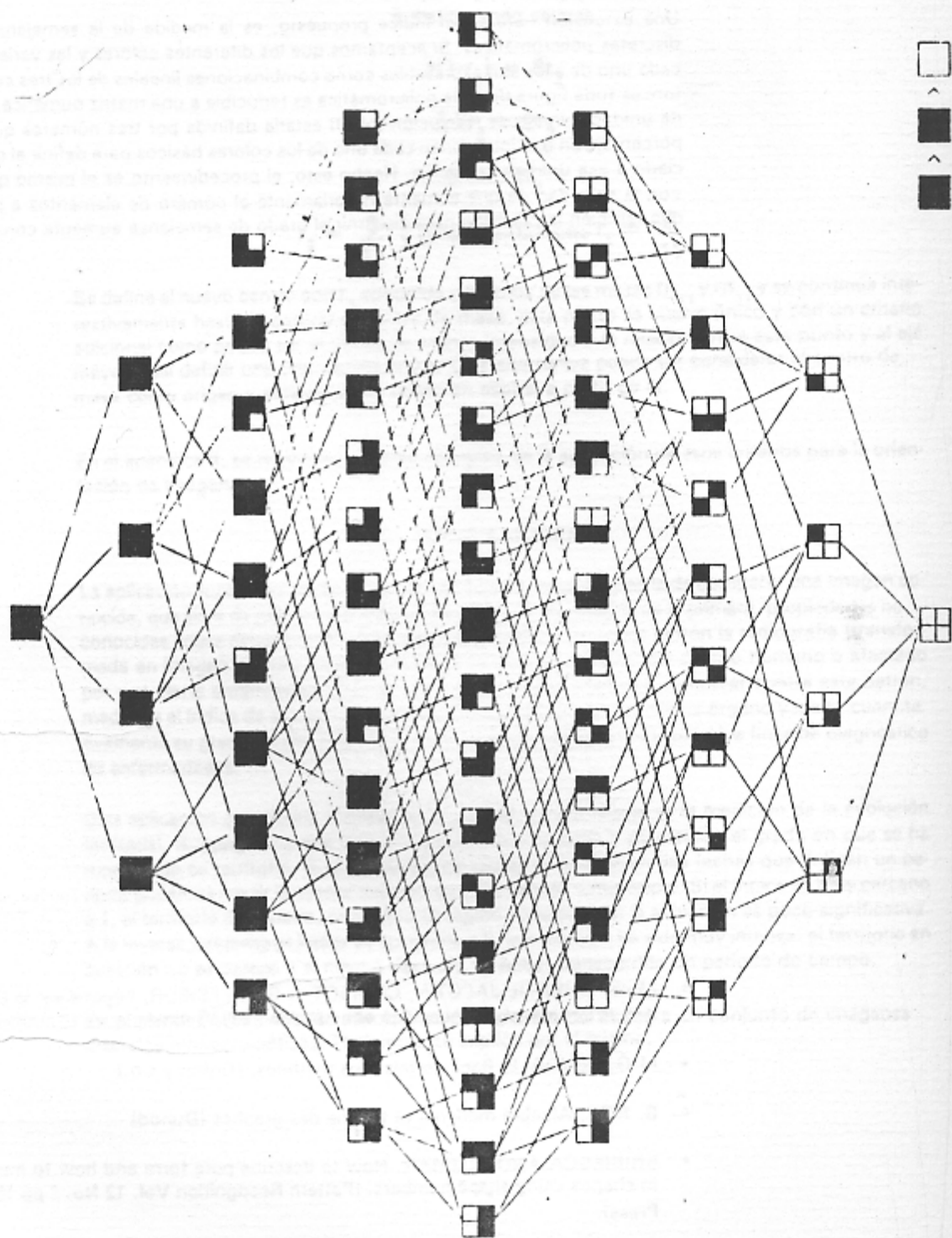
En el anexo IV, se presenta una aplicación concreta del índice a un conjunto de imágenes discretas monocromáticas. El ejemplo se explica por sí mismo.

POSIBLES EXTENSIONES

Una extensión natural del índice propuesto, es la medida de la semejanza entre imágenes discretas policromáticas. Si aceptamos que los diferentes colores y las variaciones de tono en cada uno de ellos son expresables como combinaciones lineales de los tres colores básicos, entonces toda figura discreta policromática es reducible a una matriz numérica. En este caso, cada unidad mínima de resolución (pixel) estaría definida por tres números que identificarían el porcentaje en que intervienen cada uno de los colores básicos para definir el color y el tono asociado a esa unidad o posición. Hecho esto, el procedimiento es el mismo que para las (IDM) con la salvedad de que aumenta notoriamente el número de elementos a procesar. Es obvio que también la precisión para discernir el grado de semejanza aumenta considerablemente.

BIBLIOGRAFIA

- Mme. DUBREIL-JACOTIN, CROISOT et G.V. LESIEUR, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques* (Gauthier-Villars).
- M.G. KENDALL, *Rank correlations methods*, (Griffin y Co.)
- B. ROY, *Algebre moderne et théorie des graphes* (Dunod)
- BRIBIESCA AND GUZMAN, *How to describe pure form and how to measure differences in shapes using shape numbers*. (Pattern Recognition Vol. 12 No. 2 pp 101-102, Pergamon Press).

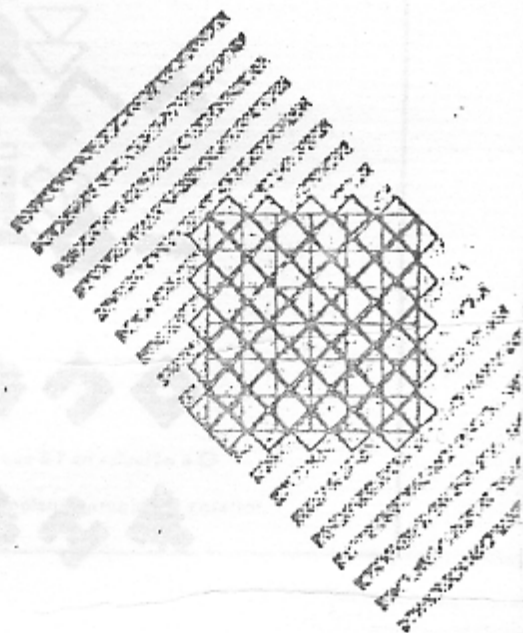
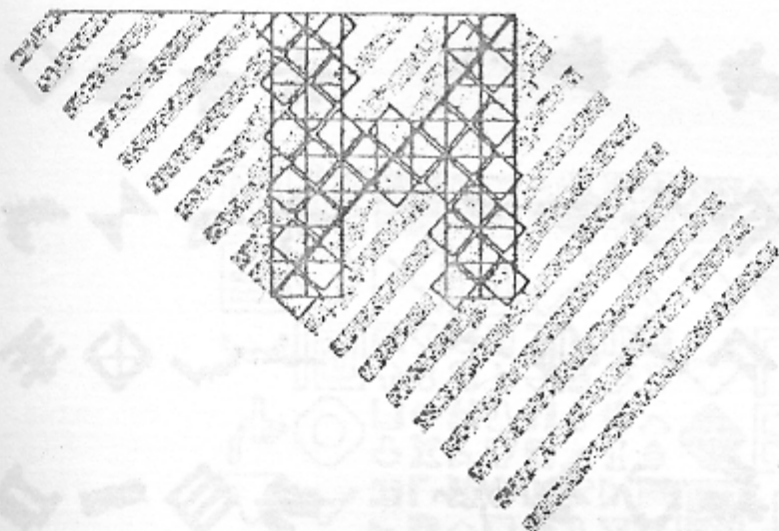


LATICE DEL CONJUNTO DE TODAS LAS IMAGENES DISCRETAS CONSTRUIBLES

LATICE DEL CONJUNTO DE TODAS LAS IMAGENES DISCRETAS CONSTRUIBLES

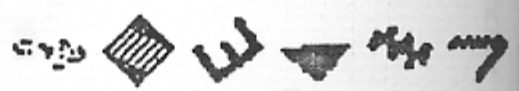
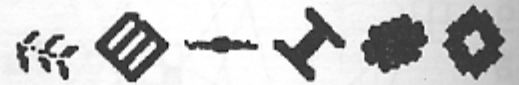
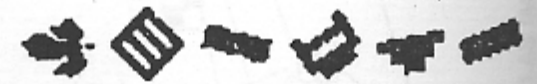
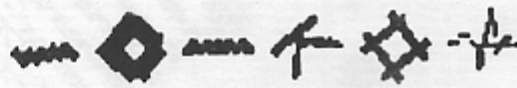
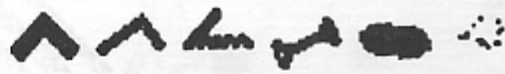
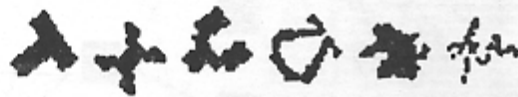
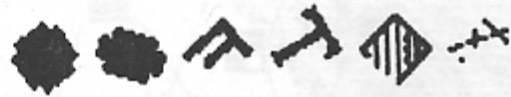
ANEXO I

ANEXO IV



ANEXO II

ANEXO III



ANEXO III

ANEXO IV



¿Cuáles son las imágenes cuyo grado de semejanza es mayor que 0.7 en relación a \square
El método responde señalando con negro las imágenes que cumplen la propiedad anterior.