1. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

Los principios fundamentales de la teoría de señales y sistemas, se basan en la idea de hacer una abstracción del fenómeno en estudio. Como veremos más adelante, ésto se logra mediante la utilización de ciertos principios matemáticos y, a través de la idéa fundamental, de representar al problema en cuestión, por una *"caja negra"* o sistema. Así por ejemplo, la caracterización de cualquier fenómeno puede ser representada ó conceptualizada como sigue:

Figura 2

Dado que una de las variables más importantes en la vida del hombre es el tiempo, las características de las señales y los sistemas son principalmente dadas en función de la variable temporal. Aunque la mayoría de las señales en la naturaleza son continuas, supondremos que previo al análisis de éstas, hubo una etapa de muestreo y cuantización. Nos limitaremos al estudio de las señales discretas en el tiempo, puesto que nuestra finalidad es la de utilizar una computadora digital para realizar los cálculos de los algoritmos salidos del análisis. Con lo anterior, una señal discreta o digital significará una secuencia de números o muestras. Por otro lado, la noción de sistema será la siguiente: dados dos conjuntos de objetos o señales Cx y Cy se asignará, de acuerdo con una regla, a cada elemento x de Cx un elemento y de Cy. Esta regla definirá un sistema con entrada x y salida y. Por lo tanto, un sistema S definido de esta forma, será una correspondencia o transformación del conjunto de entrada Cx al conjunto de salida Cy. Cuando las señales x y y son funciones de dos variables, entonces S es un sistema bidimensional. Mientras que, cuando x y y son vectores, entonces S sera un sistema multi-entrada multi-salida.

Lo anterior es una caracterización terminal de los sistemas. Es evidente que los sistemas pueden ser caracterizados de otras maneras, por ejemplo: por ecuaciones diferenciales (tiempo continuo), ecuaciones en diferencias (tiempo discreto), función de transferencia (señales y sistemas en función de la variable frecuencia), polinomios, etc. Especial interés pondremos en la representación de un sistema a través de su función de transferencia, la cuál nos permitirá introducir la noción de respuesta en frecuencia del sistema. La función de transferencia es una representación del sistema paralela a la representación temporal (variable k). Básicamente, la función de transferencia caracteriza al sistema en el dominio de la frecuencia (variable $z=f(j\omega)$). La herramienta que nos permite pasar del dominio temporal (frecuencial) al frecuencial (temporal) es la transformada Z (transformada Z inversa) indicada por el operador $Z(Z^{-1})$. En la figura 3 esquematizamos las relaciones de las señales y los sistemas en los espacios de representación indicados. Por supuesto, podemos definir otros espacios de representación, complementarios, que proporcionen informaciones adicionales y que faciliten el estudio de las señales y los sistemas.

Dentro de la clasificación de los sistemas, nos limitaremos al estudio de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo.

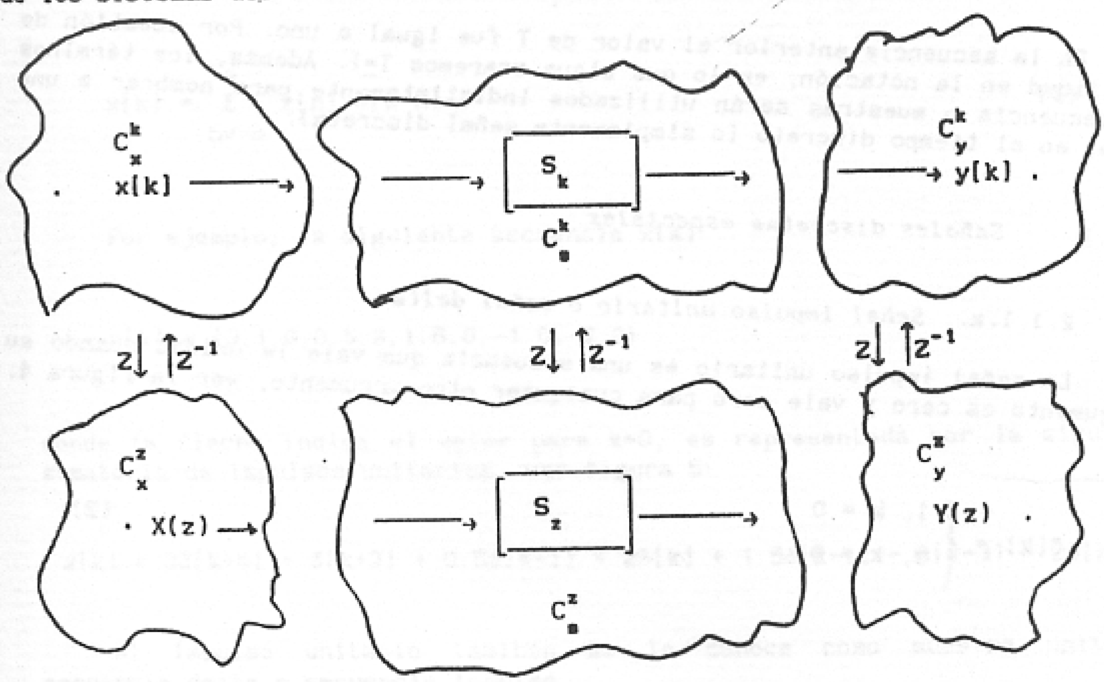


Figura 3

2.1. *Señales en el tiempo discreto.*

Una señal en el tiempo discreto, x, es representada por una secuencia de números reales o complejos definidos para todo número entero k.

$$x = \left\{ x[kT] \right\} , \quad \begin{array}{l} k = \text{conjunto de todos los enteros} \\ T = \text{intervalo de tiempo entre muestras} \end{array} \qquad (1)$$

Aunque x[kT] es el k-ésimo número del conjunto de números que forman la secuencia x, por conveniencia, representaremos con x[kT] a la secuencia x. Por otro lado, también podemos utilizar la forma tabular para listar explícitamente los elementos de la secuencia

$$x = \{\ldots, x[-3],\ x[-2],\ x[-1],\ \underset{\uparrow}{x[0]},\ x[1],\ x[2],\ x[3], \ldots\}$$

En la secuencia anterior el valor de T fue igual a uno. Por cuestión de facilidad en la notación, en lo que sigue usaremos T=1. Además, los términos de secuencia o muestras serán utilizados indistintamente para nombrar a una señal en el tiempo discreto (o simplemente señal discreta).

2.1.1. *Señales discretas especiales.*

2.1.1.a. *Señal impulso unitario o señal delta.*

La señal impulso unitario es una secuencia que vale la unidad cuando su argumento es cero y vale cero para cualquier otro argumento, ver la figura 4:

$$\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

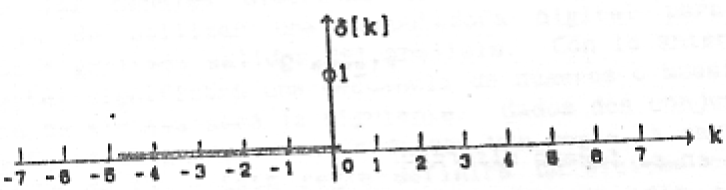


Figura 4

La utilización del impulso unitario en los sistemas lineales, nos permitirá caracterizar la salida del sistema para cualquier entrada. Lo anterior, debido a que los valores tomados por el impulso unitario, cuando el tiempo es desplazado de más o menos un número entero n, están dados por la relación:

$$\delta[k-n] = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \tag{3}$$

De la igualdad anterior, se desprende que una secuencia arbitraria x[k] puede ser representada como una sumatoria de impulsos unitarios apropiadamente desplazados y multiplicados por los valores de la secuencia x[k].

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, \delta[k-n] \tag{4}$$

Por ejemplo, la siguiente secuencia x[k]

$$x[k] = \{3, 1, 0, 0.5, \underset{\uparrow}{2}, 1.5, 0, -1.0, -2.0\}$$

donde la flecha indica el valor para k=0, es representada por la siguiente sumatoria de impulsos unitarios, ver figura 5:

$$x[k] = 3\delta[k+4] + \delta[k+3] + 0.5\delta[k+1] + 2\delta[k] + 1.5\delta[k-1] - \delta[k-3] - 2\delta[k-4]$$

Al impulso unitario también se le conoce como muestra unitaria, secuencia delta o secuencia impulso.

2.1.1.b *Secuencia escalón unitario.*

La secuencia escalón unitario toma el valor de la unidad para todos los argumentos mas grandes que o igual a cero y, es igual a cero para los demás valores del argumento, ver figura 6:

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \tag{5}$$

El escalón unitario esta relacionado al impulso por:

$$u[k] = \sum_{n=-\infty}^{k} \delta[n] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[k-n] \tag{6}$$

además también se cumple la relación siguiente:

$$\delta[k] = u[k] - u[k-1] \tag{7}$$

1. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

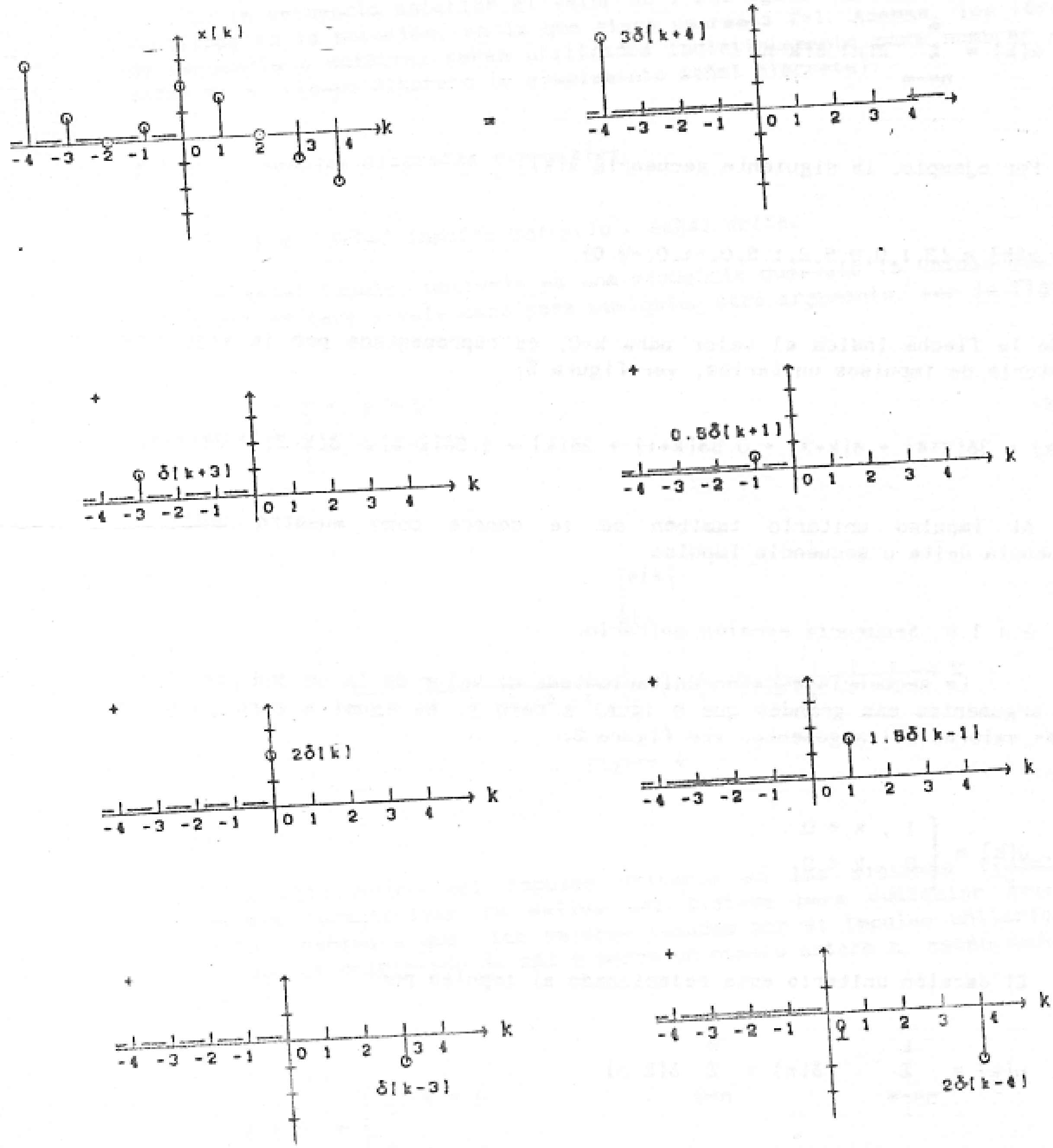


Figura 5

I. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

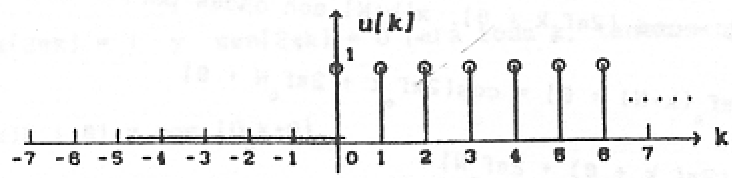


Figura 6

2.1.1.c. *Señales sinusoidales en el tiempo discreto*

Una señal sinusoidal discreta en el tiempo se define de la siguiente manera:

$$x[k] = A \cos [\Omega k+\theta] \qquad -\infty < k < \infty \qquad (8)$$

donde k es la variable entera, llamada número de muestra, A es la amplitud de la señal, Ω es la frecuencia en radianes por muestra y θ es la fase en radianes.

Si en lugar de Ω usamos la variable frecuencial, f, definida por:

$$\Omega = 2\pi f \qquad (9)$$

la relación (8) se vuelve:

$$x[k] = A \cos [2\pi fk+\theta] \qquad -\infty < k < \infty \qquad (10)$$

La frecuencia f tiene dimensiones de ciclos por muestra.

A diferencia de los sinusoides en el tiempo continuo, las sinusoides en el tiempo discreto tienen las siguientes propiedades:

A) *La sinusoides en el tiempo discreto son periódicas solo si f es un número racional.*

Por definición, si la señal x[k] es periódica con periodo N(>0) entonces:

$$x[k+N] = x[k] \quad , \quad \forall\, k \qquad (11)$$

El valor mas pequeño para el cual (11) es válida, es llamado periodo fundamental.

1. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1988.

Demostración

Sea $x[k] = \cos(2\pi f_o k + \theta)$, $x[k+N]$ son dadas por:

$$\cos[(2\pi f_o(k+N) + \theta] = \cos[2\pi f_o k + 2\pi f_o N + \theta]$$

$$= \cos[(2\pi f_o k + \theta) + 2\pi f_o N]$$

$$= \cos[2\pi f_o k + \theta]\cos[2\pi f_o N] - \text{sen}[2\pi f_o k + \theta]\,\text{sen}[2\pi f_o N]$$

para que la expresión anterior sea igual a $x[k]$ es necesario que

$$\cos[2\pi f_o N] = 1 \text{ y sen}[2\pi f_o N] = 0$$

esto es posible si y solo si, existe un entero m tal que

$$2\pi f_o N = 2m\pi$$

o equivalentemente,

$$f_o = \frac{m}{N} \quad \text{o bien,} \quad N = \frac{m}{f_o} \tag{12}$$

De acuerdo a (12), una función sinusoidal en el tiempo discreto es periódica si y solo si, su frecuencia f_o puede ser expresada como una relación de dos números enteros, en otras palabras, f_o es un número racional.

Para determinar el periodo fundamental, N, de una señal periódica, expresamos su frecuencia f_o como en la relación (12), hasta que se obtenga una mínima expresión de tal forma que m y N no tengan factores comunes. Así el periodo fundamental será igual a N. Se puede observar que pequeños cambios en la frecuencia puede implicar grandes cambios en el periodo, por ejemplo:

$$f_1 = \frac{31}{60} \Rightarrow N_1 = 60 \quad \text{y si} \quad f_2 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \Rightarrow N_2 = 2.$$

B) *Señales sinusoidales en el tiempo discreto cuyas frecuencias estan separadas por un múltiplo entero de 2π, son idénticas.*

Demostración

Sea $x[k] = \cos[(\Omega_o + 2\pi)k + \theta) = \cos[(\Omega_o k + \theta) + 2\pi k]$

$$= \cos[\Omega_o k+\theta]\cos[2\pi k] - \text{sen}[\Omega_o k+\theta]\,\text{sen}[2\pi k]$$

y puesto que $\cos[2\pi k] = 1$ y $\text{sen}[2\pi k] = 0$ para toda k, tenemos que:

$$\cos[(\Omega_o+2\pi)k + \theta] = \cos[\Omega_o k+\theta]. \qquad (13)$$

De lo anterior, se puede concluir que todas las sinusoides

$$x_n[k] = A\cos(\Omega_n k+\theta), \qquad n=0,1,2,.... \qquad (14)$$

donde $\Omega_n = \Omega_o + 2n\pi$ para $-\pi < \Omega_o < \pi$, son idénticas.

De otra manera, las secuencias de dos sinusoides cualesquiera, con frecuencias en el rango, $-\pi \le \Omega \le \pi$ o $-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$, son distintas. Por lo tanto, señales sinusoidales en el tiempo discreto con frecuencias $|\Omega| \le \pi$ o $|f| \le 1/2$ son únicas. Cualquier secuencia resultante de una señal sinusoidal con una frecuencia $|\Omega| > \pi$ o $|f| > 1/2$, es idéntica a la secuencia obtenida de una señal sinusoidal con frecuencia $|\Omega|<\pi$. Es conveniente recordar que en el tiempo continuo las señales sinusoidales son distintas para ω o F dentro del rango de variación $-\infty < \omega < \infty$ o $-\infty < F < \infty$.

C) *Las tasas de oscilación más altas en señales sinusoidales en el tiempo discreto, son alcanzadas cuando $\omega = \pi$ (o $\omega = -\pi$) o de manera equivalente, $f = 1/2$ (o $f = -1/2$).*

Para ilustrar esta propiedad, investiguemos las características de la secuencia sinusoidal

$$x[k] = \cos[\Omega_o k]$$

para valores de Ω_o que van desde 0 o 2π. Para ejemplificar tomemos $\omega_o = 0$, $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{15}{8}\pi$, 2π, que corresponden a, $f_o = 0$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$, 1, lo cual implica señales sinusoidales con periodos de $N = \infty$, 16, 8, 4, 2, 4, 8, 16, 1, ver la figura 7. Se constata, que el periodo de las secuencias sinusoidales se decrementa cuando la frecuencia se incrementa. De hecho, se puede ver que las tasas de oscilación se incrementan cuando las frecuencias se incrementan (esto cuando Ω_o varía de 0 a π). Cuando Ω_o varía de π a 2π, la tasa de oscilación de las señales sinusoidales se decrementa.

Como para el caso de señales sinusoidales en el tiempo continuo, en el caso discreto, también podemos introducir las frecuencias negativas. Para ésto, usemos la relación siguiente:

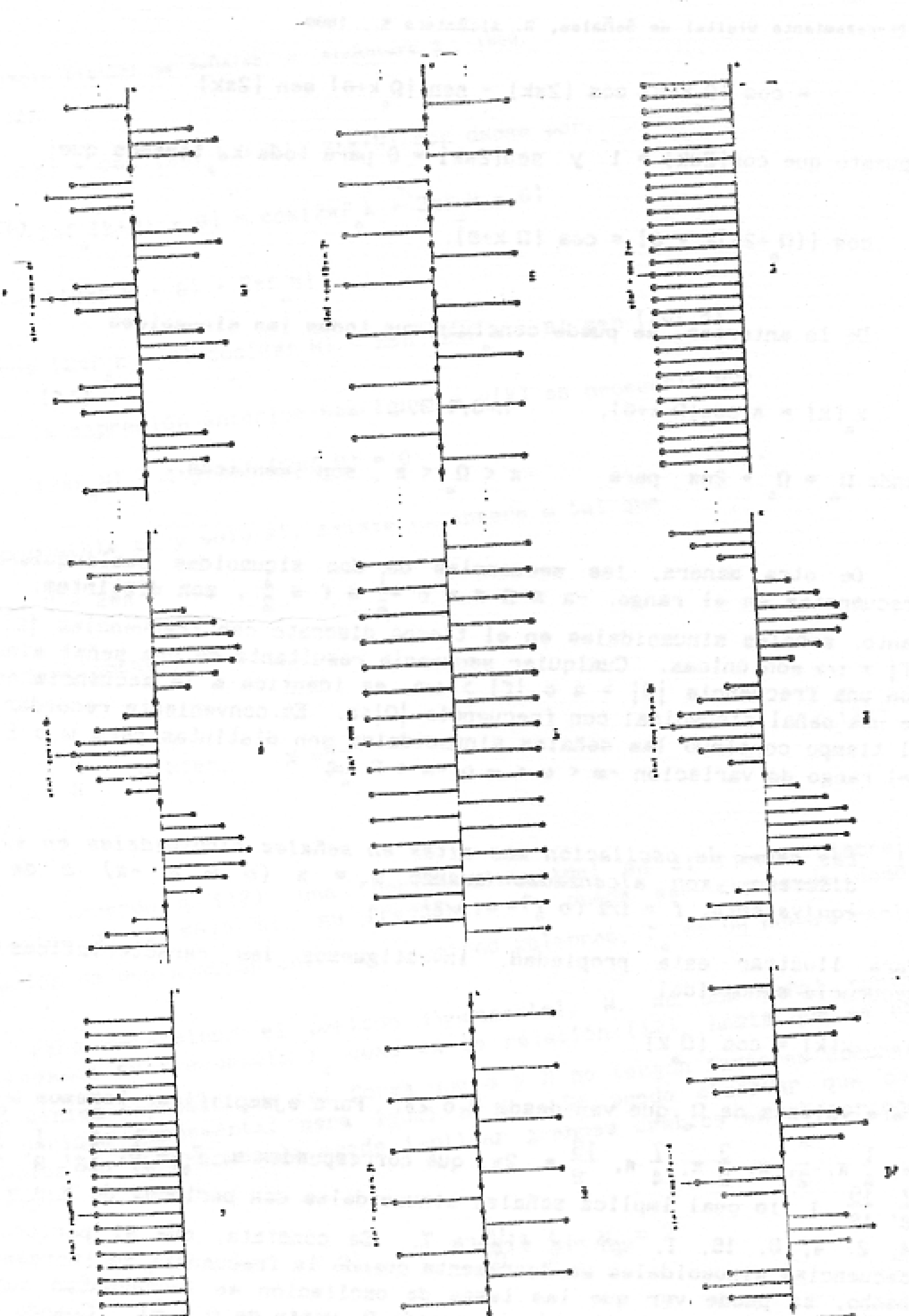


Figura 7

I. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

$$x[k]=A\cos[\Omega k+\theta]=\frac{A}{2}e^{J(\Omega k+\theta)}+\frac{A}{2}e^{-J(\Omega k+\theta)} \quad (15)$$

Puesto que las sinusoides en el tiempo discreto, con frecuencias separadas por un múltiplo entero de 2π son idénticas, se sigue que las frecuencias en cualquier intervalo $\Omega_1 \le \Omega \le \Omega_1+2\pi$ constituyen todas las sinusoides o las exponenciales complejas en el tiempo discreto existentes. De lo anterior, el rango de frecuencias de las señales sinusoidales en el tiempo discreto es finito y de duración 2π. Generalmente, se selecciona el rango $0 \le \Omega \le 2\pi$ o $-\pi \le \Omega \le \pi$ ($0 \le f \le 1$ o $-\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$).

2.1.2. *Exponenciales complejas relacionadas armónicamente.*

Las señales sinusoidales y las exponenciales complejas juegan un rol muy importante en la teoría de señales y sistemas. Es interesante trabajar con funciones exponenciales complejas (o sinusoidales) relacionadas armónicamente. Estas forman conjuntos de exponenciales complejas periódicas, con frecuencias fundamentales que son multiplos de una frecuencia positiva.

Puesto que una señal sinusoidal en el tiempo discreto es periodica, si su frecuencia relativa es un número racional, podemos escoger $f_o = \frac{1}{N}$ y así, definir a los conjuntos de exponenciales complejos relacionados armónicamente, de la siguiente manera:

$$S_n(k) = e^{J2\pi n f_o k}, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \pm\ldots.. \quad (16)$$

A diferencia del caso continuo, constatamos que en el caso discreto

$$S_{n+N}(k) = e^{J2\pi(n+N)f_o k} = e^{J2\pi n f_o k}\,e^{J2\pi N f_o k} = e^{J2\pi n f_o k}\,e^{J2\pi k}$$

puesto que $e^{J2\pi k} = 1$, tenemos:

$$S_{n+N}(k)=S_n(k) \quad (17)$$

y de acuerdo con $x[k+N] = x[k]$, existirán únicamente N exponenciales complejas periódicas diferentes. Además, todos los miembros del conjunto tendrán un periodo común de N muestras.

I. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

Es evidente que podremos escoger cualquier N exponenciales complejas consecutivas, de $n = n_o$ a $n = n_o + N-1$, para formar un conjunto relacionado armónicamente, con frecuencia fundamental $f_o = 1/N$. Si $n_o=0$, el conjunto será:

$$S_n[k] = e^{J2\pi kn/N}, \quad n=0,1,2,\dots,N-1. \tag{18}$$

Como en el caso de señales continuas, la combinación lineal,

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} c_n S_n[k] = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{J2\pi kn/N} \tag{19}$$

sera una señal periódica con periodo fundamental N. La ecuación anterior, será la representación por series de Fourier de una secuencia periódica en el tiempo discreto, x[k], con coeficientes de Fourier $\{c_n\}$.

2.2. *Muestreo de una señal en el tiempo continuo.*

Sea la señal continua x(t) a banda limitada, $|X_B(\omega)| = 0$ para $|\omega| > B$, si tomamos muestras lo suficientemente espaciadas con respecto a la frecuencia más alta de la señal x(t), entonces las muestras determinarán únicamente una señal y ésta, podrá ser reconstruida a partir de sus muestras.

Para mostrar lo anterior multipliquemos a la señal x(t) por el tren de impulso unitario en el tiempo continuo,

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), \qquad \text{donde} \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \tag{20}$$

donde ω_s y T son la frecuencia y el periodo de muestreo respectivamente, obtendremos entonces,

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \tag{21}$$

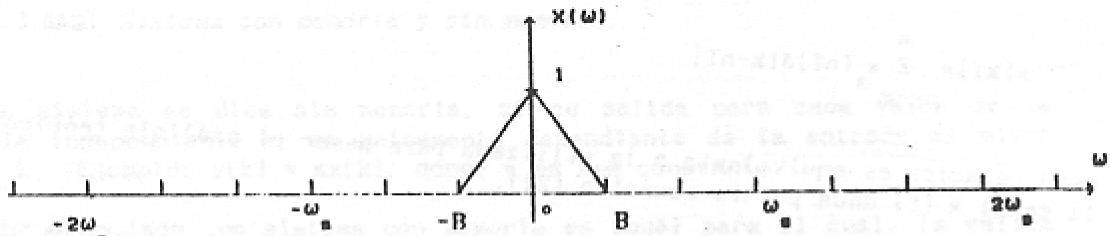
Calculando la transformada de Fourier de $x_s(t)$, tendremos que

I. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

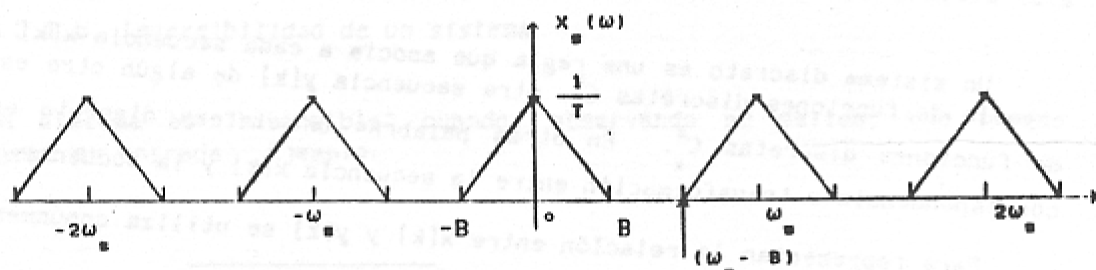
$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \qquad (22)$$

$X_s(\omega)$ es una función periódica en el dominio de la frecuencia, compuesta por réplicas desplazadas de $X(\omega)$ y ponderada por $\frac{1}{T}$.

Si suponemos que $X(\omega)$ es la siguiente función



$X_s(\omega)$ será:



la gráfica anterior es válida para,

$(\omega_s - B) > B$

Por lo tanto

$$\omega_s > 2B. \qquad (23)$$

Para este caso, las muestras $x(nT)$ para $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, podrán reconstruir $x(t)$: a) generando un tren de impulsos cuyas amplitudes son las muestras sucesivas, b) pasando este tren de impulsos por un filtro paso-bajas

1. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

con ganancia T y frecuencia de corte ω_c, donde $B < \omega_c < \omega_s - B$. En este caso, la salida resultante será exactamente igual a x(t).

Lo anterior es el enunciado del teorema del muestreo, y, a $\omega_s > 2B$ se le conoce como la frecuencia de Nyquist o de Shannon.

El análisis anterior nos permitió determinar la frecuencia de muestreo (de Nyquist) necesaria para pasar del tiempo continuo al dominio del tiempo discreto. Desde un punto de vista práctico, podemos escribir la relación siguiente:

$$x[kT] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(nT)\delta[k-nT] \tag{24}$$

esta relación es equivalente a la utilizada para hacer el análisis teórico de la señal $x_s(t)$ dada por la ecuación (21).

El teorema del muestreo nos permite representar una señal continua x(t), en términos de los valores x(nT) que toma la señal, mediante una secuencia de puntos equidistantes. Los puntos equidistantes pueden ser representados por la secuencia x[kT], la señal discreta. Lo anterior es válido, siempre y cuando se satisfaga el teorema del muestreo para una señal x(t) continua.

2.3. *Sistemas Discretos.*

Un sistema discreto es una regla que asocia a cada secuencia x[k] de un espacio de funciones discretas C_x^k, otra secuencia y[k] de algún otro espacio de funciones discretas C_y^k. En otras palabras un sistema discreto es una correspondencia o transformación entre la secuencia x[k] y la secuencia y[k].

Para representar la relación entre x[k] y y[k] se utiliza comúnmente la notación siguiente

$$y[k] = L\{x[k]\} \tag{25}$$

Donde L es una transformación. Al dominio de la transformación, x[k], se le conoce con el nombre de entrada y al codominio, y[k], como salida o respuesta del sistema.

El cálculo de la salida y[k] de un sistema, para un valor k dado, requiere, en algunos casos, del conocimiento de la entrada x[k] para toda k perteneciente al pasado o al futuro.

La relación entrada-salida de un sistema puede ser esquematizada de la siguiente forma:

1. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1988.

$$x[k] \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow y[k] = L(x[k])$$

2.3.1. *Propiedades de los sistemas discretos.*

2.3.1.a. *Sistema con memoria y sin memoria.*

Un sistema se dice sin memoria, si su salida para cada valor de la variable independiente k, es unicamente dependiente de la entrada al mismo tiempo k. Ejemplo: $y[k] = ax[k]$, donde a es una constante.

Por otro lado, un sistema con memoria es aquél para el cuál, la salida depende de los valores de la entrada anterior al tiempo k. Ejemplo:

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{k} x[n]$$

2.3.1.b. *Inversibilidad de un sistema.*

Un sistema es "inversible" cuando, observando su salida, uno puede determinar su entrada. Ejemplo:

$$x[k] \longrightarrow \boxed{y[k] = \sum_{n=-\infty}^{k} x[n]} \xrightarrow{y[k]} \boxed{z[k] = y[k] - y[k-1]} \xrightarrow{x[k]}$$

2.3.1.c. *Sistema Causal.*

Un sistema es causal, si su salida para todo instante k, depende únicamente, de los valores de la entrada a los instantes presente y pasado.

I. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1988.

2.3.1.d. *Linealidad de un sistema.*

Un sistema es lineal si satisface las propiedades de:

- superposición $\quad L\{x_1[k]+x_2[k]\} = y_1[k]+y_2[k]$ (26)

- escalonamiento $\quad L\{a\, x_1[k]\} = a\, y_1[k]$ (27)

o en otras palabras, si cumple la relación siguiente:

$$L\{a_1x_1[k] + a_2x_2[k]\} = L\{a_1x_1[k]\} + L\{a_2x_2[l]\} = a_1y_1[k] + a_2y_2[k] \quad (28)$$

2.3.1.e. *Sistemas invariantes en el tiempo*

Si y[k] es la salida de un sistema L cuando la entrada es x[k],

$$x[k] \longrightarrow \boxed{L} \xrightarrow{y[k]}$$

entonces, el sistema será invariante si:

$$x[k-n] \longrightarrow \boxed{L} \xrightarrow{y[k-n] = L\{x[k-n]\}}$$

En otras palabras, un desplazamiento en la entrada se traduce por un desplazamiento igual en la salida:

$$y[k-n] = L\{x[k-n]\} \quad (29)$$

Podemos recordar aquí que, un sistema puede ser lineal, sin ser invariante en el tiempo. Por otro lado, un sistema puede ser invariante en el tiempo, sin ser lineal.

Existen otras propiedades importantes de los sistemas, sin embargo por cuestiones de facilidad de análisis y síntesis, nos limitaremos a continuación, al estudio de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo discreto.

1. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

2.3.2. *Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo Discreto.*

Vamos a suponer que la relación entre la señal de entrada y la señal de salida esta dada por la transformación L cuyas propiedades son: la linealidad y la invariancia temporal. A estos sistemas se les conoce con el nombre de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, en esta parte nos interesamos únicamente por el caso discreto. En lo que sigue, a menos de que se indique lo contrario, el término sistema lineal (SL) será usado para llamar a un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto (SLITD).

Las bases principales del análisis de los sistemas lineales son:

- el principio de superposición
- la representación de una señal $x[k]$ por una sumatoria de impulsos unitarios, ecuación (4).

2.3.2.a. *Respuesta de un sistema lineal al impulso unitario $\delta[k]$.*

Analicemos la repuesta de un sistema lineal cuando la entrada $x[k]$, es igual al impulso unitario $\delta[k]$.

$$\delta[k] \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow y[k]$$

El valor de $y[k]$ estará dado por:

$$y[k] = L\{\delta[k]\}$$

Supóngamos que para este caso la respuesta $y[k]$ es conocida, en otras palabras, definamos a $h[k]$ como la respuesta al impulso unitario $\delta[k]$.

$$L\{\delta[k]\} \triangleq h[k] \qquad (30)$$

La función $h[k]$ no necesariamente será igual a cero para $n < 0$, pero si es el caso, entonces $h[k]$ representará un sistema causal.

2.3.2.b. *Respuesta de un sistema lineal a cualquier señal discreta x[k] - Suma de Convolución.*

Vamos a ver a continuación que, los sistemas lineales son caracterizados completamente por su respuesta al impulso unitario, $h[k]$.

Una vez estimada la respuesta al impulso unitario, $h[k]$, la salida del sistema para cualquier entrada $x[k]$ estará dada por:

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n] \tag{31}$$

esquemáticamente tendremos:

$$x[k] \longrightarrow \boxed{h[k]} \longrightarrow y[k]$$

Se define a la suma de convolución por el operador *, con ésto la ecuación (31) se puede escribir de la siguiente forma:

$$y[k] = x[k] * h[k] \tag{32}$$

Demostración de (31)

Expresemos primero a $x[k]$, como una sumatoria de impulsos unitarios, ecuación (4):

$$x[k]= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[k-n] =$$

$$= +\ldots+x[-2]\delta[k+2]+x[-1]\delta[k+1]+x[0]\delta[k]+x[1]\delta[k-1]+x[2]\delta[k-2]+\ldots+$$

Del principio de superposición podemos aplicar por separado al sistema cada uno de los términos de la sumatoria anterior, y con ésto, tendremos un valor de salida correspondiente a cada componente de la sumatoria.

$$L\{x[k]\} = + \ldots + L\{x[-2]\delta[k+2]\} + L\{x[-1]\delta[k+1]\} + L\{x[0]\delta[k]\} + L\{x[1]\delta[k-1]\} + L\{x[2]\delta[k-2]\} + \ldots$$

utilizando ahora la definición (30), obtenemos:

$$y[k] = L\{x[k]\} = + \ldots + x[-2]h[k+2] + x[-1]\, h[k+1] + \\ + x[0]h[k] + x[1]h[k-1] + x[2]\, h[k-2] + \ldots.$$

o bajo la notación de sumatoria:

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n].$$

De (31), se puede demostrar fácilmente la siguiente propiedad:

$$y[k] = x[k]*h[k] = h[k]*x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]x[k-n] \qquad (33)$$

2.3.2.c. *Respuesta de un sistema lineal a una exponencial compleja - Función de transferencia.*

La idéa de representar a una secuencia de muestras, como una combinación lineal de exponenciales complejas, también esta motivada por la idéa de aproximar la señal discreta mediante una serie de Fourier. A continuación, veremos que la exponencial compleja es una función propia de los sistemas lineales.

Supongamos que la entrada de un sistema lineal esta dada por:

$$x[k] = z^k \quad , \qquad \text{donde} \qquad z = e^{j\omega} \qquad (34)$$

para esta entrada, la salida puede ser calculada a partir de la ecuación (33),

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]x[k-n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{k-n} = z^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

con lo que, y[k] se puede escribir de la siguiente manera:

$$y[k] = H(z)\; z^k \; , \qquad (35)$$

donde se definió:

$$H(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} . \tag{36}$$

De la ecuación (35) vemos que, cuando la entrada del sistema es una exponencial compleja, la salida es la misma exponencial, pero multiplicada por la constante H(z), que depende del valor de z.

H(z) es el valor propio asociado a la función propia z^k del sistema. Al factor H(z) se le puede llamar *función de transferencia* del sistema. Por otro lado la serie

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

representa una correspondencia entre la secuencia h[k] y la función H(z). Generalmente se utiliza la siguiente notación para designar dicha correspondencia:

$$h[k] \leftrightarrow H(z)$$

Esta correspondencia es válida para cualquier secuencia discreta x[k], y su correspondiente función X(z),

$$x[k] \leftrightarrow X(z) \tag{37}$$

A la función X(z) se le conoce con el nombre de transformada Z de la secuencia x[k] y se define, de la ecuación (38), por

$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \tag{38}$$

2.3.2.d. *Teorema de Convolución.*

Utilizando la definición de la transformada Z de una secuencia, se puede demostrar fácilmente el siguiente Teorema.

I. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

Teorema 1. Si las ecuaciones

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad y \quad Y(z)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n}$$

son, respectivamente, la transformada Z de la entrada x[k] y de la salida y[k] del sistema lineal, cuya función de transferencia es H(z), se tiene entonces que:

$$Y(z) = H(z)\ X(z) \tag{39}$$

Demostración.

De la respuesta en el tiempo discreto de un sistema lineal

$$y[k] = h[k]*x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]x[k-n],$$

podemos calcular la transformada Z de y[k]

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]Z\{x[k-n]\},$$

pero de la propiedad de desplazamiento

$$Z\{x[k-\ell]\}= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-\ell]\ z^{-n} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j]\ z^{-j-\ell}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ z^{-n-\ell} = z^{-\ell} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ Z^{-n}$$

$$= z^{-\ell}\ X(z)$$

$$Z\{x[k-\ell]\} = z^{-\ell}\ X(z)$$

podemos escribir:

1. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} X(z) = X(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

y por lo tanto:

$$Y(z) = H(z)\, X(z).$$

2.3.2.e. *Respuesta del sistema a un conjunto de exponenciales complejas.*

Si la entrada, $x[k]$, a un sistema lineal es representada como una combinación lineal de exponenciales complejas.

$$x[k] = \sum_{n} c_n z_n^k \tag{40}$$

entonces, la salida del sistema lineal estará dada por:

$$y[k] = \sum_{n} c_n H(z_n) z_n^k \tag{41}$$

En otras palabras, la salida también puede ser representada por una combinación lineal de las mismas exponenciales complejas, donde cada coeficiente de éstas, se obtiene multiplicando los coeficientes de la entrada, c_n, por los valores propios del sistema, $H(z_n)$, asociados a las funciones propios z_n^k.

De los resultados anteriores, podemos resumir la definición de función de transferencia de las tres formas siguientes:

a) $H(z)$ es la transformada Z de $h[k]$.
b) Si $x[k] = z^k$, entonces, $H(z)$ es el coeficiente de la respuesta resultante $y[k] = H(z)z^k$.
c) $H(z)$ es igual a $Y(z)/X(z)$.

La respuesta al impulso unitario y la función de transferencia son las dos formas mas utilizadas para caracterizar a los sistemas lineales. A continuación veremos que las ecuaciones en diferencias, también son muy utilizadas para representar un sistema.

2.3.2.f. *Representación del sistema por ecuaciones en diferencia.*

Una ecuación en diferencias a coeficientes constantes, también puede ser usada para caracterizar un sistema lineal. La expresión más general para llevar a cabo esta representación es la siguiente:

$$\sum_{n=0}^{p} c_n y[k-n] = \sum_{m=0}^{q} d_m x[k-m], \tag{42}$$

donde los c_n y los d_m son los coeficientes que definen al sistema, y, x[k] e y[k] son usados para representar las señales de entrada y de salida del sistema, respectivamente. Aunque la relación (42) es general, nos interesamos principalmente por los sistemas causales: aquéllos para los cuáles ambas secuencias, x[k] e y[k], son iguales a cero para $k < 0$. La ecuación (42) puede ser rescrita, expresando la salida actual y[k] en términos de las entradas presentes y pasadas y también de las salidas pasadas.

$$y[k] = - \sum_{n=1}^{p} a_n y[k-n] + \sum_{m=0}^{q} b_m x[k-m] \tag{43}$$

donde

$$a_n = \frac{c_n}{c_o} \qquad \text{y} \qquad b_m = \frac{d_m}{c_o} \tag{44}$$

Con la suposición de causalidad del sistema, si (42) se cumple para todo k, se tiene que y[k] está univocamente determinada a partir de x[k]. Cabe mencionar que, la solución de la ecuación (42) también depende de las condiciones iniciales. Así, el sistema correspondiente es lineal, si las condiciones iniciales son nulas. Por otro lado, si en la ecuación (43), disponemos de la entrada para todo k y de un conjunto de condiciones iniciales, {y[-n], y[-n+1], ..., y[-1]}, la ecuación puede ser resuelta para los valores sucesivos de y[k].

La relación (43) puede ser implantada como un conjunto de multiplicaciones, sumas y retardos. La figura *8* muestra la implantación directa de ésta ecuación.

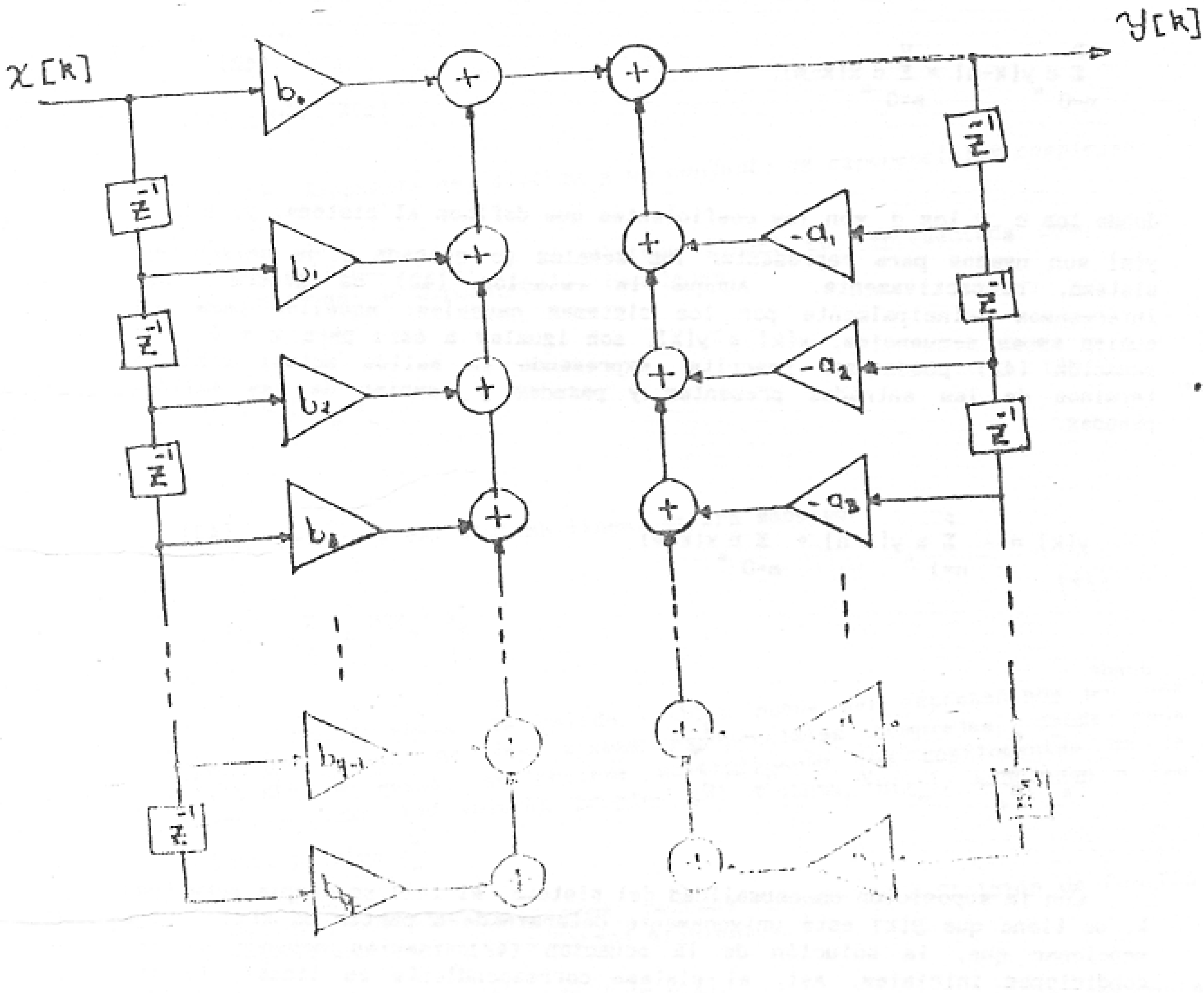


Figura 8

2.3.2.g. *Relación entre la representación por ecuaciones en diferencias y la función de transferencia.*

La señal y[k] puede ser determinada fácilmente si empleamos la transformada Z. Sean X(z) y H(z), respectivamente, la transformada Z de x[k] y h[k]. Aplicando la relación $Z\{x[k-\ell]\} = z^{-\ell}X(z)$ a la ecuación (43),

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \ldots + a_p y[k-p] = b_o x[k] + b_1 x[k-1] + \ldots + b_q x[k-q]$$

obtendremos:

$$Y(z) + a_1 z^{-1}\, Y(z) + \ldots + a_p z^{-p} Y(z) = b_o X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \ldots + b_q z^{-q} X(z)$$

o bien

$$Y(z) = H(z)\, X(z) \tag{45}$$

donde,

$$H(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{q-1} z^{-q+1} + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{p-1} z^{-p+1} + a_p z^{-p}} \tag{46}$$

La secuencia y[k] podra ser evaluada, utilizando la ecuación (45), de dos maneras distintas:

a) Calculando X(z) a partir de x[k] y después la transformada inversa del producto H(z)X(z). Lo anterior es posible si X(z) es una función racional.

b) Calculando la transformada inversa de H(z), h[k], y realizando la convolución entre h[k] y x[k].

1. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

2.3.3. *Respuesta en frecuencia de un sistema lineal.*

La respuesta en frecuencia de un sistema lineal, con respuesta al impulso, h[k], se obtiene evaluando la función $H(z)$ para $z = e^{j\omega}$.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \tag{47a}$$

Puesto que $H(e^{j\omega})$ es una función compleja, podemos escribir:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \quad e^{j\theta_h(\omega)} \tag{47b}$$

donde $|H(e^{j\omega})|$ y $\theta_h(\omega)$ son la magnitud y la fase, respectivamente, de la respuesta en frecuencia del sistema.

Podemos ver que, si la exitación al sistema representado por h[k] es

$x[k] = a \quad e^{j(\omega k+\theta)}$, donde a es una constante,

tendremos que:

$$y[k] = a|H(e^{j\omega})| \ e^{j[\omega k+\theta+\theta_h(\omega)]}$$

De la expresión anterior constatamos que, la respuesta en frecuencia del sistema es modificada cuando tenemos una señal de entrada x[k], cuyas caracteristicas frecuenciales pueden ser definidas de la siguiente manera:

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = |X(\omega)|e^{j\theta_x(\omega)} . \tag{48}$$

Utilizando la expresión anterior, y, evaluando la ecuación (39) para $z=e^{j\omega}$, podemos escribir:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\ X(e^{j\omega})$$

y ahora, remplazando las ecuaciones (47b) y (48) en la ecuación anterior, obtenemos

$$Y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})|e^{j[\theta_h(\omega)+\theta_x(\omega)]} \qquad (49)$$

Por otro lado, la función $Y(e^{j\omega})$ puede ser escrita de la siguiente manera:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = |Y(e^{j\omega})|e^{j\theta_y(\omega)} \qquad (50)$$

Igualdando las ecuaciones (49) y (50), obtenemos que, la magnitud y y la fase de $Y(e^{j\omega})$ estarán dadas, respectivamente por:

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|\ |X(e^{j\omega})| \qquad (51)$$

y

$$\theta_y(\omega) = \theta_h(\omega) + \theta_x(\omega) \qquad (52)$$

La magnitud y la fase de $Y(e^{j\omega})$, estan ambas representadas en función de la variable frecuencial ω. A las representaciones gráficas de $|Y(e^{j\omega})|$ y $|\theta_y(\omega)|$ contra la variable frecuencial ω, se les conoce respectivamente, con el nombre de espectro en frecuencia de magnitud y espectro en frecuencia de fase de la respuesta del sistema. Por supuesto, la noción de espectro puede ser utilizada para caracterizar gráficamente a cualquier señal (o sistema) en el dominio de la frecuencia. Lo anterior es válido, independientemente que las señales (o los sistemas) estén representadas en el dominio del tiempo discreto (k) o continuo (t).

Desde el punto de vista de la teoría de señales y sistemas, la relación $Y(z) = H(z)X(z)$, donde $H(z)$ caracteriza al sistema asociado al fenómeno estudiado y $X(z)$ representa a la señal de entrada del sistema, nos permite establecer dos situaciones que definen los objetivos buscados por una aplicación en particular:

1) Cómo el sistema modifica las propiedades de la señal de entrada ?

Este "cómo", puede ser determinado mediante el diseño de un sistema con ciertas propiedades deseadas. Otro caso se presenta, cuando las caracteristicas del sistema son intrinsecas al fenómeno estudiado.

2) Cómo la señal de entrada modifica las propiedades intrínsecas del sistema asociado al fenómeno estudiado ?

En este caso, el "cómo" puede ser determinado mediante la elaboración de señales de entrada, bajo un cierto critério, que permitan modificar las propiedades del sistema, de manera a obtener una respuesta deseada.

Dentro de las áreas de la ingeniería eléctrica, el procesamiento digital de señales se encuentra dentro del primer enfoque, mientras que el control automático, pertenece al segundo enfoque.

2.3.4. *Estabilidad de los sistemas lineales.*

2.3.4.a. *A partir de la representación temporal.*

Un sistema lineal se dice estable, en el sentido de respuestas acotadas a entradas acotadas, si su respuesta a cualquier entrada acotada, es ella misma acotada. Una secuencia x[k] será acotada, si existe un escalar finito, M, tal que:

$$|x[k]| \leq M \qquad \text{para todo } k. \tag{53}$$

En otras palabras, las magnitudes de los elementos de la señal nunca son mayores a un valor finito prestablecido.

Veamos que sucede con la salida del sistema caracterizado por su respuesta al impulso, ecuación (33),

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]x[k-n]$$

Para esto, aplicando a la ecuación (33), la desigualdad y la igualdad de dos números a y b dadas por:

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{y} \quad |ab| = |a|\,|b|, \tag{54}$$

obtenemos:

$$|y[k]| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|\,|x[k-n]| \leq M \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|. \tag{55}$$

Puesto que el limite superior se mantiene para todo valor de k, la condición de estabilidad de un sistema lineal puede ser dada por el siguiente teorema.

Teorema 2. Un sistema lineal caracterizado por su respuesta al impulso unitario $h[k]$, es estable en el sentido establecido, si y solo si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{55}$$

Dicho de otra manera, un sistema lineal será estable si los elementos de la secuencia $h[k]$ van hacia cero, lo suficientemente rápido como k se aproxima a más y menos infinito.

2.3.4.b. *A partir de la representación frecuencial.*

La función racional $H(z)$, dada por la ecuación (46),

$$H(z) = \frac{b_o + b_1 z^{-1} + \ldots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_p z^{-p}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

puede ser fácilmente representada en función de z_{+p} multiplicando simplemente el numerador, $B(z)$, y el denominador, $A(z)$, por z^{p} si $p \geq q$ o por z^{q} si $q > p$. Usando un teorema fundamental del álgebra, siempre se puede factorizar a los polinomios $A(z)$ y $B(z)$ en función de productos de sus términos de primer orden,

$$A(z) = 1 + \sum_{n=1}^{p} a_n z^{-n} = \prod_{n=1}^{q} (1-p_n z^{-1}) \tag{56}$$

y

$$B(z) = \sum_{n=1}^{p} b_n z^{-n} = b_o \prod_{n=1}^{q} (1-z_n z^{-1}) \tag{57}$$

remplazando (56) y (57) en (40) tenemos:

$$H(z) = \frac{b_0(1-z_1z^{-1})\,(1-z_2z^{-1})\,\ldots\,(1-z_qz^{-1})}{(1-p_1z^{-1})\,(1-p_2z^{-1})\ldots\,(1-p_pz^{-1})} = \frac{B(z)}{A(z)} \qquad (58)$$

Los parámetros z_n y p_n que salen de la factorización de H(z), son llamados respectivamente, ceros y polos del sistema representado por H(z). El nombre viene del hecho que si evaluamos la función X(z) en un valor de z correspondiente a uno de los ceros ($z = z_n$), la función misma se vuelve cero. Por otro lado, si evaluamos la función para $z = p_n$, H(z) se vuelve no acotada. Para poder invertir H(z), en otros palabras obtener h[k], se requiere que $q \le p$. Las características de estabilidad de un sistema lineal representado por su función de transferencia H(z), se obtienen directamente de la factorización del polinomio del denominador, ecuación (56). La estabilidad del sistema se resume en el siguiente teorema :

Teorema 3. El sistema lineal caracterizado por la ecuación en diferencias (43), será estable si y solo si, su función de transferencia (46), descompuesta por $H(z) = H_c(z) + H_a(z)$, tiene todos los polos causales con módulo menor que uno y todos los polos anticausales con módulo más grande que uno. $H_c(z)$ y $H_a(z)$ son respectivamente la parte causal y anticausal de H(z).

2.4. *Filtros Digitales.*

Una gran gama de filtros digitales pueden ser descritos por sistemas lineales caracterizados por la ecuación en diferencias (43)

$$\sum_{n=0}^{p} a_n y[k-n] = \sum_{m=0}^{q} b_m x[k-m] \qquad , \qquad a_0 = 1$$

o por su función de transferencia, (46) :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_p z^{-p}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

I. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

La respuesta al impulso unitario del filtro, h[k], es la transformada Z inversa de la función de transferencia H(z) y satisface la ecuación en diferencias :

$$h[k]+a_1h[k-1]+\ldots+a_ph[k-p]=b_0\delta[k]+b_1\delta[k-1]+\ldots+b_q\delta[k-q] \quad (58)$$

Si los coeficientes a_n y b_n son reales, h[k] también será real, en otras palabras, el sistema sería real. De lo anterior, el término filtro digital significará que se habla de un sistema lineal, y, recíprocamente, el término sistema lineal puede ser usado indistintamente para llamar a un filtro digital.

El diseño de un filtro digital consiste, en determinar los coeficientes de la ecuación (46) que satisfacen una relación entrada-salida especificada, a priori, bajo un cierto criterio.

Existen dos clases principales de filtros digitales : los filtros a respuesta impulsional finita (RIF) y los filtros a respuesta impulsional infinita (RII).

Hasta ahora hemos visto que un sistema lineal puede ser caracterizado por su respuesta al impulso unitario h[k], por su función de transferencia H(z) y por su representación a través de ecuaciones en diferencia. Es conveniente, subdividir a los sistemas lineales en dos clases : aquéllos con respuesta al impulso de duración finita (RIF) y aquéllos con respuesta al impulso de duración infinita (RII). A los sistemas lineales RIF y RII también se les conoce con el nombre de sistemas lineales no-recursivos y recursivos, respectivamente.

2.4.a. *Filtros o Sistemas RIF* .

Un sistema RIF es aquel que tiene una respuesta al impulso que vale cero fuera de algún intervalo de tiempo finito. Sin pérdida de generalidad, si el sistema RIF es causal :

$$h[k] = 0 \qquad k < 0 \text{ y } k \geq M$$

La suma de convolución de tal sistema se reduce a

$$y[k]= \sum_{n=0}^{M-1} h[n]x[k-n] \qquad (59)$$

1. Procesamiento Digital de Señales, R. Alcántara S., 1989.

La secuencia y[k] depende únicamente del valor actual de la señal de entrada y de un número finito de valores pasados de la señal de entrada. La salida del sistema es simplemente una combinación lineal ponderada de la señal de entrada. La ecuación (43) para valores de $a_n = 0$ y $a_0 = 1$ representa un sistema RIF de duración q. En este caso, es evidente que los coeficientes del filtro RIF son equivalentes a la respuesta al impulso del filtro, $b_n = h[n]$.

2.4.b. *Filtros o Sistemas RII.*

En contraste con los filtros RIF, un sistema RII es aquél que tiene una respuesta al impulso de duración infinita,

$$y[k] = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]\, x[k-n] \tag{60}$$

De otra manera, la respuesta del filtro RII es una función de los valores presentes y pasados de la señal de entrada y de los valores pasados de las muestras de la señal de salida.

La relación (43) representa un sistema RII. La dependencia de las salidas pasadas (recursividad) implica una duración infinita de la salida del filtro, aún cuando los valores de entrada se hayan terminado.